



TITLE:

# 区分的線形手法に基づくネットワーク解析 (電気回路の力学系)

AUTHOR(S):

大附, 辰夫

---

CITATION:

大附, 辰夫. 区分的線形手法に基づくネットワーク解析 (電気回路の力学系). 数理解析研究所講究録 1976, 284: 123-141

ISSUE DATE:

1976-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106086>

RIGHT:

## 込分的線形手法に基づくネットワーク解析

日本電気(株)・中研 大附辰夫

### I. はしがき

非線形抵抗回路網を解析する問題は  $n$  次元ユーグリッド空間  $R^n$  から  $R^n$  への写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  と点  $Y \in R^n$  を与えて

$$f(x) = Y \quad (1)$$

を満たす  $x \in R^n$  を求める問題と考えられる。ここで  $Y$  は与えられた入力(電源)の一次結合を  $x$  は各部の電流, 電圧などの変数を表わすものである。方程式(1)に関して興味ある理論的問題は

- i)  $f$  が one-to-one (ある  $Y$  に対して解が存在すればそれは一意に定まる) であるか否か?
- ii)  $f$  が onto (全ての  $Y$  に対して少なくとも一つの解が存在する) であるか否か?
- iii)  $f$  が homeomorphism (全ての  $Y$  に対して一意解が存在する) であるか否か?

などを判定する為の条件を求めることであろう。しかしそのような条件があったとしても、それを識別することが実際に (i) の解を求めることよりもはるかに手間がかかるとすれば、実用的に価値があるとは云えない。そこで本稿では、上記の  
 . . . . .  
 i), ii), iii) を回路の接続関係とは独立に、ちなわち回路を構成する非線形素子の性質だけから判定できるような条件を与える。次に、(i) の  $f$  が区分的線形の場合について有効な求解アルゴリズムを与える。ここで“有効”とは、i) に関して言えば、解が存在する時は必ずその一意解が求まること、ii), iii) に関して言えば、任意の  $Y$  に対して少なくとも1つの解が求まることを意味する。最後に、上記の区分的線形手法が電気回路の直流解析、過渡解析のみならず種々のネットワーク型計画問題に対しても有効であることを述べる。

## II. 区分的線形写像の性質

本稿の議論で対象とする写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  は常に連続であると仮定する。以下2つのベクトル  $x, y \in R^n$  に対する内積  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  を  $\langle x, y \rangle$  で、 $x \in R^n$  のノルム  $\langle x, x \rangle^{1/2}$  を  $\|x\|$  で表わすことにする。又、行列又はベクトルの転置は右上に  $T$  を付けて表示する。写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  の性質に関して下記の用語を用いることにする。

norm-coercive  $\Leftrightarrow \|f(x)\| \rightarrow \infty \text{ (} \|x\| \rightarrow \infty \text{)}$

weakly coercive  $\Leftrightarrow \exists u \in R^n \text{ s.t. } \langle f(x), x-u \rangle / \|x-u\| \rightarrow \infty \text{ (} \|x\| \rightarrow \infty \text{)}$

strongly coercive  $\Leftrightarrow \langle f(x), x-u \rangle / \|x-u\| \rightarrow \infty \text{ (} \|x\| \rightarrow \infty \text{)}, \forall u \in R^n$

monotone  $\Leftrightarrow \langle f(u)-f(v), u-v \rangle \geq 0, \forall u, v \in R^n$

strictly monotone  $\Leftrightarrow \langle f(u)-f(v), u-v \rangle > 0, \forall u, v \in R^n \text{ s.t. } u \neq v$

uniformly monotone  $\Leftrightarrow \exists \gamma > 0 \text{ s.t. } \langle f(u)-f(v), u-v \rangle \geq \gamma \|u-v\|^2, \forall u, v \in R^n$

passive on u  $\Leftrightarrow \langle f(x)-f(u), x-u \rangle \geq 0, \forall x \in R^n$

strictly passive on u  $\Leftrightarrow \langle f(x)-f(u), x-u \rangle > 0, \forall x \in R^n - \{u\}$

uniformly passive on u  $\Leftrightarrow \exists \gamma > 0 \text{ s.t. } \langle f(x)-f(u), x-u \rangle \geq \gamma \|x-u\|^2, \forall x \in R^n$

Lipshitzian  $\Leftrightarrow \exists \gamma > 0 \text{ s.t. } \|f(u)-f(v)\| \leq \gamma \|u-v\|, \forall u, v \in R^n$

写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  が 区分的線形 であるとは  $R^n$  が有限個の凸多面体領域に分割され、その各々  $R_k$  において  $f$  が affine 写像であることである。すなわち領域  $R_k$  ごとに定数行列  $J^{(k)}: n \times n$  (Jacobian 行列 と呼ぶ) と定数ベクトル  $b^{(k)} \in R^n$  が存在して、全ての  $x \in R_k$  に対して

$$f(x) = J^{(k)} x + b^{(k)} \quad (2)$$

が成立することである。区分的線形写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  において、二つの隣接した領域を分割する  $(n-1)$  次元の超平面を以下 境界超平面 と呼ぶ。又、 $B \subset R^n$  は境界超平面上の点の集合を、 $E \subset R^n$  は特異な Jacobian 行列を持つ領域に属する点の集合を表すことにする。先ず区分的線形写像の性質を列挙する。<sup>[1]</sup>

補題 1  $f$  が norm-coercive ならば  $f(E) \subset f(B)$  である.  $\square$

補題 2 2つの領域  $R_1, R_2$  (Jacobian 行列をそれぞれ  $J^{(1)}, J^{(2)}$  とする) が境界超平面  $H$  (normal vector を  $r$  とする) をへだてて接しているとき,

$$J^{(2)} - J^{(1)} = c r^T \quad (3)$$

を満たす定数ベクトル  $c \in R^n$  が存在する.  $\square$

補題 3 上記の  $J^{(1)}, J^{(2)}$  の rank の差は高々 1 である.  $\square$

補題 4  $f$  は Lipschitzian である.  $\square$

補題 5  $f$  が weakly coercive ならば strongly coercive である. (従って, 区分的線形写像に対しては単に coercive という言葉を用いる.)  $\square$

補題 6  $f$  が strictly monotone ならば uniformly monotone でもある.  $\square$

非線形方程式の解の存在を論ずる上で degree of mapping の概念は重要である<sup>(2)</sup>. ここでは全空間  $R^n$  に関する degree を,  $f$  が区分的線形である場合に限定して, 単純な形で定義する.  $f: R^n \rightarrow R^n$  が norm-coercive とすれば, 任意の  $y \in R^n - f(B)$  に対して (1) の解  $x^{(k)}$ ;  $k=1, 2, \dots, m$  は高々有限個である. この  $x^{(k)}$  が属する領域の Jacobian 行列を  $J^{(k)}$  としたとき整数

$$\deg(f, R^n, y) = \sum_{k=1}^m \operatorname{sgn} \det J^{(k)} \quad (4)$$

を  $f$  の  $y$  における 大域的 degree と呼ぶ.

補題 7 (degree invariance property<sup>[1]</sup>)

$$\deg(f, R^n, y^{(1)}) = \deg(f, R^n, y^{(2)}), \quad \forall y^{(1)}, y^{(2)} \in R^n - f(B) \quad (5)$$

区分的線形写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  に対して 1)  $u \notin B$ , 2)  $f(x) \neq f(u)$ , 3)  $u$  が属する領域の Jacobian は正である, が同時に成立するような点  $u \in R^n$  は 1-degree 条件 を満たすという.  $\square$

補題 8  $f: R^n \rightarrow R^n$  が norm-coercive で且つ 1-degree 条件を満たす点を持てば  $f(R^n) = R^n$ , すなわち  $f$  は onto である.  $\square$

### Ⅲ. 区分的線形方程式の求解アルゴリズム

1-degree 条件を満たす点  $x^{(0)} \in R^n$  を出発値として (1) の解を求めるアルゴリズムについて述べる. (1) における  $y$  と  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$  を結ぶ線分  $L_y$  を  $y$  空間<sup>上</sup>に考え, この  $x$  空間への逆写像  $L_x = f^{-1}(L_y)$  を求めれば,  $L_x$  — 折線の形状をしている — の一端は  $x^{(0)}$ , 他端が解である.  $x^{(0)}$  の属する領域を  $R_1$ , その Jacobian 行列を  $J^{(0)}$  (仮定から  $\det J^{(0)} > 0$ ) とする.  $L_x$  の  $R_1$  中の線形部分は

$$w^{(1)}(\lambda) = x^{(0)} + \lambda [J^{(0)}]^{-1} (y - y^{(0)}) \quad (6)$$

によつて与えられる. ここで  $\lambda > 0$  はパラメータで, もし

$w^{(1)}(1)$  がたまたま  $R_1$  の中にあれば, これが所要の解である.

解が求まらなかつた時は  $\lambda \in (0, 1)$  の値を  $w^{(1)}(\lambda)$  が  $R_1$  の境界

$H_1$  の上に乗るよう決定する。その値を  $\lambda_1$  とすれば、第2近似解は

$$x^{(2)} = w^{(1)}(\lambda_1) \quad (7)$$

によって与えられる。境界  $H_1$  をはさんで  $R_1$  と反対側の領域を  $R_2$ 、その Jacobian 行列を  $J^{(2)}$ 、 $y^{(2)} = f(x^{(2)})$  とすれば、 $L_x$  の  $R_2$  の中の線分は

$$w^{(2)}(\lambda) = x^{(2)} + \lambda [J^{(2)}]^{-1} (y - y^{(2)}) \quad (8)$$

によって与えられる。もし  $\det J^{(2)} > 0$  であれば、 $\lambda \geq 0$  に対して  $w^{(2)}(\lambda)$  は  $R_2$  の中に存在し、第1ステップと同様な方法で第3近似解  $x^{(3)}$  が求められる(図1(a))。

この場合系列  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots\}$  は単調に  $y$  に近づく(図2(b))。もし

全ての領域の Jacobian が正であれば、上記の手順を有限回繰り返すことによって解が求められる。これを Katznelson法<sup>[3]</sup> という。もし  $\det J^{(2)} < 0$  であれば、

$\lambda \geq 0$  に対して  $w^{(2)}(\lambda)$  が  $R_2$  の中に存在する。この場合も、 $\lambda < 0$

の値を  $w^{(2)}(\lambda)$  が  $R_2$  の別の境界  $H_2$  の上に乗るよう決定する。もし

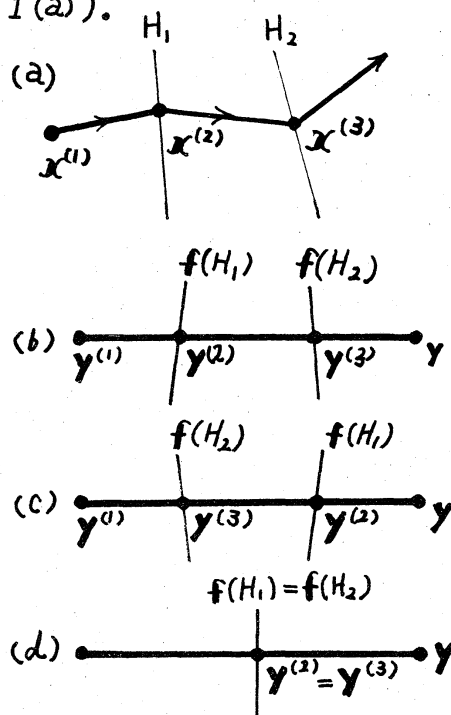


図1. 求解アルゴリズム

しそのような  $\lambda_2 < 0$  が存在すれば

$$x^{(3)} = w^{(2)}(\lambda_2) \quad (9)$$

を次の近似解とする。この場合  $y^{(3)} = f(x^{(3)})$  とすれば

$$\|y - y^{(3)}\| > \|y - y^{(2)}\| \quad (10)$$

となり、近似解の系列は一時的に解から遠ざかる(図1(c))。

$\det J^{(2)} = 0$  の場合でも、 $\det J''' > 0$  という仮定と、補題3より  $J^{(2)}$  の rank は  $n-1$  であるので、

$$J^{(2)} \beta = 0 \quad (11)$$

を満たすベクトル  $\beta \neq 0$  が定数係数の範囲内で一意的に定まる。従って  $L_x$  の  $R_2$  の中の線分は

$$w^{(2)}(\lambda) = x^{(2)} + \lambda \beta \quad (12)$$

によって定められる。前と同様にして、次の近似解  $x^{(3)}$  は  $R_2$  の別の境界  $H_2$  の上に求められる。この場合は図1(d)に示すように  $y^{(2)} = y^{(3)}$  となる。特異な Jacobian 行列を持つ領域を含む場合にも上記のアルゴリズムが有効であることは次の事実によって保証される。

補題9  $L_x$  が2つ以上の境界超平面を同時に横切らないとすれば、1)  $L_x$  は rank  $(n-2)$  以下の Jacobian 行列を持つ領域を通過しない、更に2)  $L_x$  がある境界超平面を通過する時は、単一の点においてである。  $\square$

上記のように、Jacobianの符号が異なる領域を含んでいても、



又特異な Jacobian 行列を持つ領域を含んでいても、 $L_x$  を延長させるようにした解法を 一般化 Katzenelson 法 <sup>[1]</sup> という。  $L_x$  が 2 つ以上の境界超平面に同時にぶつかった場合には、適当な perturbation 法を用いてこれを回避することができる <sup>[1]</sup> ので、以下  $L_x$  は常に単一の境界超平面を横切ると仮定する。区分的線形写像を定める領域の数は有限個であるので、一般化 Katzenelson 法は次のようなケースが発生しない限り解に収束する。

A) Jacobian が負の領域において  $L_x$  を無限に延長できる。

B) Jacobian が 0

C)  $L_x$  が出発値を含む領域  $R_i$  に戻ってしまう。

ところが、 $f$  が norm-coercive であればケース B) を除外し、更に出発値が 1-degree 条件を満たせばケース A), C) も除外される。よって次の定理が得られる。

定理 1 norm-coercive な区分的線形写像  $f: R^n \rightarrow R^n$  に関して 1-degree 条件を満たす点  $u \in R^n$  が存在するならば、出発値を  $u$  として、式 (1) に対して適用した一般化 Katzenelson <sup>法</sup> は任意の  $y \in R^n$  に対して有限回の反復によって一つの解を求めることができる。 □

注: 全ての領域の Jacobian が同符号ならば、境界超平面 <sup>上</sup> には限りなく出発値はどこでも良い。又、norm-coercive でなくても

$f(R^n)$  が convex であれば, 全ての  $y \in f(R^n)$  に対して解が求  
められ,  $y \in R^n - f(R^n)$  に対しては上述のケース B) ~~の場合~~ の  
発生によって解の存在しないことが判別できる。

例題 二次元の方程式

$$\begin{cases} g(x_1) + x_1 + x_2 = y_1 \\ g(x_2) + x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \quad (13)$$

において,  $y = (y_1, y_2)^T = (69, 75)^T$  を与えて  $x = (x_1, x_2)^T$   
を求める問題を考える。ここで  $g(\cdot)$  は図 2(a) で与えられる区  
分的線形関数, 出発値として 1-degree 条件を満たす点  $x^{(1)}$   
 $= (0, 1)^T$  を与える。  $y$  と  $y^{(1)} = f(x^{(1)}) = (1, 7)^T$  を結ぶ線分  $L_y$   
の逆写像  $L_x = f^{-1}(L_y)$  は一つの折線と一つのループから成っ  
ている。  $x^{(1)}$  はループの上に乗っていないので, 一般化  
Katzenelson 法の反復を 5 回行うことによって解  $x = (16, 17)^T$   
に収束する。一方出発値を 1-degree 条件を満たさない点  $x^{(6)}$   
 $= (13, 4)^T$  にすると, ループの上を一周して解に到達すること  
なしに出発値に戻ってしまう (以上図 2(b) 参照)。出発値と  
して  $x^{(1)}, x^{(6)}$  を与えた時の収束過程の  $y$  平面上での振舞をそ  
れぞれ図 2(c), (d) に示す。  $x^{(1)}$  と  $x^{(6)}$  を比較すれば,  $y^{(6)}$   
 $= f(x^{(6)})$  の方が  $y^{(1)} = f(x^{(1)})$  よりも  $y$  に近いのであるが, 収束  
するか否かは別問題である。本例題は  $\|f(x^{(k)}) - y\|$  が単調  
に減少するような系列  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$  を発生させることに特

微とする反復解法 (Newton法など) の限界を示したものであるが, 一般化Katzenelson法はこのような場合にも有効である。

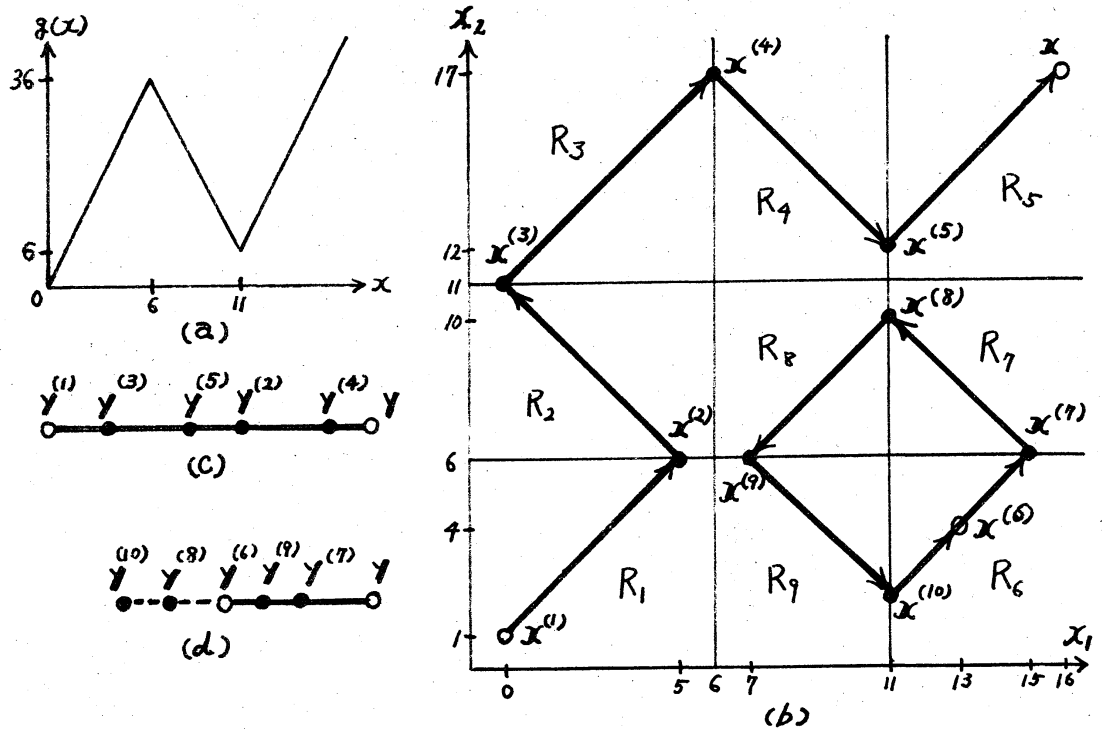


図 2. 一般化Katzenelson法の適用例

#### IV. 抵抗回路網の解析

抵抗の特性は, 一般に

$$z^{(k)} = h^{(k)}(x^{(k)}) \quad (14)$$

という形式で表わされる。ここで  $h^{(k)}$  の次元  $n_k$  を抵抗の ポート数 という。例えばダイオードは  $n_k = 1$ , トランジスタは  $n_k = 2$  となる。全ての抵抗の特性を寄せ集めれば

$$z = h(x) \quad (15)$$

と表現でき,  $h: R^n \rightarrow R^n$  は各々の抵抗の特性  $h^{(k)}$  の直和であり,  $h$  の次元  $n$  は回路に含まれる抵抗のポート数の総和である. 又,  $x, z$  はポートの電流あるいは電圧を表わす変数のベクトルで  $x_i; i=1, 2, \dots, n$  が電流(電圧)ならば対応する  $z_i$  は電圧(電流)であるという規約——ハイブリッド表示——という——をもうける. 以後議論の簡単化のため, 全ての抵抗は電圧制御型, すなわち  $z=i, x=v$  と仮定する.

電気回路の全ての電圧(流)源を短絡(開放)除去し, 抵抗の各ポートを枝に対応させたグラフにおける一つの本を選び, これに基づく基本カットセット行列, 基本ループ行列をそれぞれ  $[I \mid -A], [A^T \mid I]$  とすれば, 回路方程式は

$$f(x) = P h(x) + Q x = y \quad (16)$$

と表わされる. ここで  $y$  は電源を表わすベクトル,  $P, Q$  は

$$P = \begin{bmatrix} I & -A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^T & I \end{bmatrix} \quad (17)$$

という構造を持つ  $n \times n$  の正方形行列の対である. ある領域における  $f(x), h(x)$  の Jacobian 行列をそれぞれ  $J, H$  とすれば

$$J = P H + Q \quad (18)$$

となることは明らかである.

補題10  $P z + Q x = 0 \Rightarrow \langle z, x \rangle = 0$  ☒

補題11  $H$  が positive definite ならば  $\det J > 0$  である. ☒

次に(16)の解の一貫性と存在に関する重要な結果を与える。

定理2  $h$ が *strictly monotone* ならば  $f$  は *one-to-one* である。☒

定理3  $h$ が *strongly coercive* ならば  $f$  は *onto* である。☒

ここで、補題10より定理2が導かれ、式(17)と *weakly coercive* な写像は *onto* であるという事実<sup>[2]</sup>より定理3が導かれる。

系1  $h$ が *uniformly passive* 且つ *Lipshitzian* ならば  $f$  は *onto* である。☒

系2  $h$ が *uniformly monotone* ならば  $f$  は *homeomorphism* である。☒

以下  $h: R^n \rightarrow R^n$  は、従って  $f: R^n \rightarrow R^n$  も区分的線形とする。

補題12  $h$ が *coercive* ならば  $f$  は *norm-coercive* である。☒

区分的線形写像  $h$  がある点  $u$  の上で *strictly passive* であり、且つ  $u$  がどの境界超平面の上にも乗っていないとき、 $u$  は  $h$  に関して Property U を満たすという。ここで補題10, 11 を適用すれば次の結果が得られる。

定理4 点  $u$  が  $h$  に関して Property U を満たせば、(6) で与えられる  $f$  に関して  $u$  は 1-degree 条件を満たす。☒

上記の補題12, 定理4およびⅢ章の定理1によれば、 $h$  に関して Property U を満たす点  $u$  を出発値にすれば一般化Katzenelson法によって方程式(16)の解が確実に求められることになる。ここで、このような点  $u$  は個々の抵抗の特性に関して Property U を満たす点を寄せ集めることによって得られるこ

とを強調しておく。物理的に意味を持つ非線形素子の静特性は、これを適当に区分的線形近似すれば、Property U を満たす点を持つと考えて差しつかえない。

例えば図3に示すようなポート数=1の抵抗の特性においては、太線の部分に対応する任意の点がProperty U を満たす。ポート数=2の抵抗の代表的なものとしてトランジスタのEbers-Mollモデルがある。この特性  $\mathbf{i} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 g(n_1 v_1) \\ m_2 g(n_2 v_2) \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。但し

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1 \\ \alpha_1 < m_1/m_2, n_1/n_2 < 1/\alpha_2 \\ m_1 n_1, m_2 n_2 > 0 \end{cases} \quad (20)$$

である。<sup>[4]</sup> 又  $g(\cdot)$  は単調増加な一変数関数であるが、これを適当に折線で近似する。このモデルにおいて、点  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  が  $n_1 v_1 = n_2 v_2$  という関係を満たし且つ  $n_1 v_1$  が  $g(\cdot)$  に関してProperty U を満たせば  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{g}$  に関してProperty U を満たす。

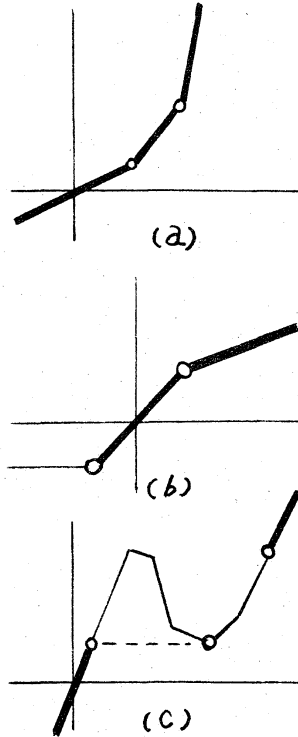


図3. ダイオードの特性

## V. 電気回路の直流解析と過渡解析

直流解析とは定電源を印加してから時間が十分経過した静止状態における各部の電流電圧の値を求める問題である。この状態ではインダクタ(キャパシタ)の電圧(電流)は0であるので、インダクタ(キャパシタ)を短絡(開放)除去することによって得られる抵抗回路の解析を行うことに帰着される。NECTAR2は一般化Katzenelson法に基づく電子回路解析のプログラムであるが、個々の非線形素子についてその特性とProperty Uを満たす点の値をライブラリの中に登録しておくことができるので<sup>[1]</sup>、ユーザーは反復解法の出発値のことを心配しなくても、プログラムが確実に解を求めてくれる。

過渡解析は電源を印加した直後の回路変数の時間的变化を調べる問題で、数学的には常微分方程式を解く問題と考えられる。先ず初期条件は上記の直流解析によって求められる。更に数値積分の1ステップの計算は仮想的な抵抗回路の解析を行う問題と等価である。例えば

後退オイラー法の1ステップは

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot \dot{x}(t+\Delta t) \quad (21)$$

を与えられ、 $x(t)$  を与えて  $x(t+\Delta t)$  を求めるための非線形連立方程式の解は、図4に示すようにリアクタンス素子を抵抗と定電源の組み

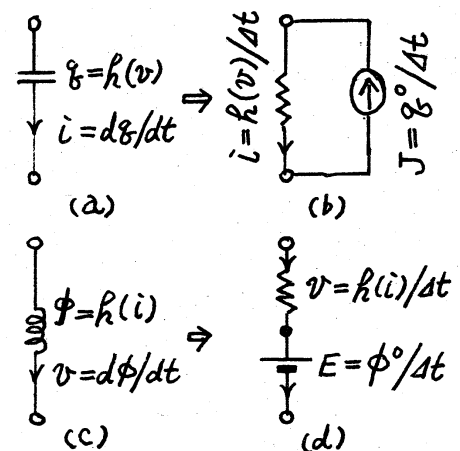


図4. 後退オイラー法の解法

合せて表現することによって得られる折れ回路を解く問題になる。

## VI. その他応用

1. 第IV章で述べた折れ回路網方程式の定式化においては非線形特性は電圧または電流の連続関数として表現されることを前提としてきた。図5に示すような $i$ ,  $v$ のどちらを独立変数にとっても一価関数とならない場合でも, 特性が unicursal である限り, 適当なパラメータ  $x$  と二つの連続関数  $\xi(x)$ ,  $\eta(x)$  を導入すれば, 特性は

$$i = \xi(x), \quad v = \eta(x) \quad (22)$$

と形式で表現できる。従って解くべき方程式は式(16)の代わりに

$$P\xi(x) + Q\eta(x) = Y \quad (23)$$

となる。例えば図5(c)に示す理想ダイオードに対しては

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

で定義される連続で区分的線形関数  $\delta: R^1 \rightarrow R^1$  を用いて

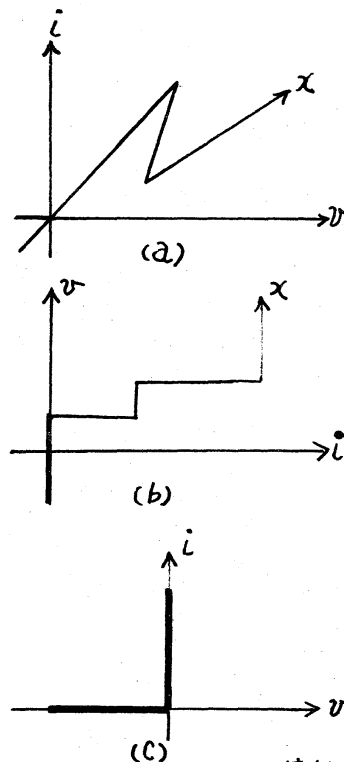


図5. unicusaral な特性



$$i = \delta(x), \quad v = -\delta(-x) \quad (25)$$

と表現すれば良い。従って一般にKatznelson法は理想ダイオードを含む回路に対しても有効である。

2. ここで述べた手法と理論は、電気回路と同じように質量保存則とエネルギー保存則に従う系に対しても全く同様な形で適用できる。例えば水道、ガスなどの管網解析に対しては電圧を圧力差に、電流を流量に対応させて考えればよい。

3. Lagrangeの未定乗数法を適用すれば、単調増加な特性を持つ抵抗から成る回路を解く問題は下記の2つの問題と互いに等価であることが導かれる。<sup>[5]</sup>

P1: キルヒホッフの電流則を満たす変数  $i \in R^n$  で関数

$$P(i) = \sum_{k=1}^n \int_{i_k}^{i_k} \gamma_k(x) dx \quad (25)$$

を最小にする。 □

P2: キルヒホッフの電圧則を満たす変数  $v \in R^n$  で関数

$$g(v) = \sum_{k=1}^n \int_{v_k}^{v_k} g_k(x) dx \quad (26)$$

を最小にする。 □

ここで  $\gamma_k(i_k)$ ,  $g_k(v_k)$  はそれぞれ  $k$  番目の抵抗の特性を電流、電圧を独立変数として表示したものである。

回路を輸送路の作る道路網、電流を各輸送路に運ばれる物質の流量、 $\gamma_k(i_k)$  を単位流量あたりの費用と考えれば、P1は総輸送費用最小の輸送計画をたてる問題と考えられる。

回路にあるプロジェクトにおける作業の先行後続順序関係を表わす矢線図, 電圧を各作業にかける日数,  $\alpha_k$  (日) を単位日数あたりの費用と考えれば, P2 は総費用最小でそのプロジェクトを完了するための日程計画の問題と考えられる。

最大流問題では, 各枝 (容量  $i_{max}, i_{min}$  が与えられる) を図6のような特性を持つ抵抗とみなし, 出口から入口へ向って値-1の電圧源を付加して得られる抵抗回路を解けば解が得られる。又, 最短経路問題はこれと双対な扱いによって解析できる。但し, 最大流問題や最短経路問題などの単純な問題はそれ専用の能率良いアルゴリズムが知られており,

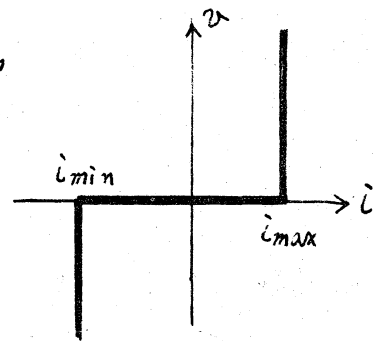


図6. 最大流問題の回路の枝特性

わざわざ一般化Katzenelson法を適用しても得をしない。

4. 道路交通網における各道路区間の交通流  $i_k$ ;  $k=1, 2, \dots, n$  と通過時間  $v_k$  の関係は図7(2)に示すような特性を持つ。又,  $i_k$  は各OD対ごとの交通流  $i_k^{(l)}$ ;  $l=1, 2, \dots, m$  の和であり, それぞれのOD対についてキルヒホフの電流則を満たす。各車についての旅行時間の総和を最小にする流量配分はいわゆる等時間原則を満たす。そ

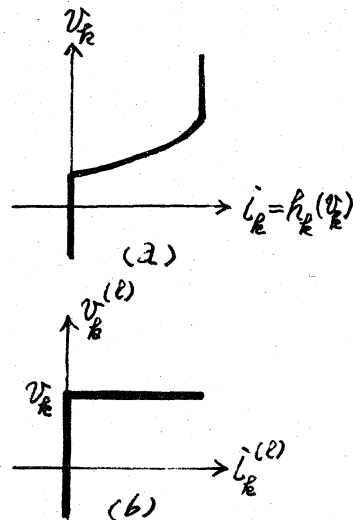


図7. 道路特性

ここで各  $O$  対ごとに、各枝ごとに図 7 (b) の特性に従う仮想的な変数  $v_k^{(e)}$  を導入すれば、この変数は各々の  $O$  対ごとにキルヒホフの電圧則を満たすことができる。すなわち、ある  $O$  対を結ぶ経路にフローが流れていれば、 $v_k^{(e)} = v_k$  となり、流れていなければ、それに属する枝について  $v_k^{(e)} \leq v_k$  としなければキルヒホフの電圧則を満たし得るというところが等時間原則に対応する。さて、図 7 (b) の特性は、式 (24) で定義した関数  $\delta(x)$  を用いることによって、

$$i_k^{(e)} = \delta(x_k^{(e)}) , \quad v_k^{(e)} = v_k - \delta(x_k^{(e)}) \quad (27)$$

と表わされるので、全体の方程式は

$$\begin{cases} P \delta(x^{(1)}) + Q (v - \delta(x^{(e)})) = j^{(e)} ; e=1, 2, \dots, m \\ -\delta(x^{(1)}) - \delta(x^{(2)}) \dots - \delta(x^{(m)}) + R(v) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

という形で記述できる。これは  $n(m+1)$  次元の非線形連立方程式を解く問題である。

多種流の最小費用流問題も単位フローあたりの費用を電圧に対応させれば式 (28) の形に定式化できる。

### 5. 線形計画問題

$$\begin{cases} A i = b & ; i \geq 0 \\ \langle c, i \rangle \rightarrow \min \end{cases} \quad (29)$$

において、 $A: m \times n$  ,  $b \in R^m$  ,  $c, i \in R^n$  とする。これに対して Kuhn-Tucker 条件を適用した後に式 (24) の関数  $\delta$  を

導入すれば,  $(m+n)$  次元の方程式

$$\begin{cases} A\delta(x) = b \\ -\delta(-x) + A^T u = c \end{cases} \quad (30)$$

が得られる。与えられた  $b, c$  に対して (30) を満たす  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$  を求め  $i = \delta(x)$  と置いたものが線形計画問題 (29) の解である。方程式 (30) に対する一般化 Katzenelson 法はある種のシンプレックス法に対応していることは興味深い。

### 文 献

- [1] T. Ohtsuki, T. Fujisawa, S. Kumagai, Existence Theorems and a Solution Algorithm for Piecewise-Linear Resistor Networks, to appear in SIAM J. Mathematical Analysis, ~~to appear in SIAM J. Math. Anal.~~ vol. 8, No. 1, Feb., 1977.
- [2] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, (1970)
- [3] J. Katzenelson, An Algorithm for Solving Nonlinear Resistive Networks, B.S.T.J., vol. 44, pp. 1605-1620, (1965)
- [4] I. W. Sandberg, A. N. Willson, Existence of Solutions for the Equations of Transistor-Resistor-Voltage Source Networks, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp. 619-625 (1971)
- [5] M. Iri, Network Flow, Transportation and Scheduling — Theory and Algorithms, Academic Press (1969)